Sia $AX=B$ un sistema lineare

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni dipende solo dalla copertura lineare delle righe di $(A|B)$ cioè dallo sp. vettoriale delle equazioni del sistema.

DIM: Se $AX=B$ è un sistema lineare e

$(\Delta)\ a'_1x_1+\dots+a'_nx_n=b'$ è una eq. comb. lineare delle equazioni di $(*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ le soluzioni di $(*)$ e di $(*)$ e (Δ) sono le medesime che le soluzioni di $(*)$.

Supponiamo $[\Delta] = \sum a_i R_i$ dove R_i = righe di $(A|B)$

$[a'_1 \dots a'_n\ b']$

Δ si scrive come

$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

mentre ognuna delle altre eq. si scrive come

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Sia $\bar{s} = [s_1 \dots s_n]$ soluzione del sistema

$$\Rightarrow [a_{i1} \dots a_{in}\ b_i] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i [a_{i1} \dots a_{in}\ b_i] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [a'_1 \dots a'_n] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (s_1 \dots s_n) \text{ è soluzione di } (*) \text{ e } (S).$$

Viceversa supponiamo che $(*) = AX = B$ sia un sistema lineare e mostriamo che ognuno di un

eq. di (*) una c. lineare delle rimanenti non cambia il sistema lineare.

$$R_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ove} \quad R_i = [a_{i1} \dots a_{in}\ b]$$

(*) $(A|B) \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$ e supponiamo di voler considerare il sistema

(*)' $(A|B)' := \begin{pmatrix} R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_m R_m \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$

mostriamo che s soluzione di (*) $\Leftrightarrow$ s soluzione di (*)'.

$(\Rightarrow)$

$$(A|B)\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow R_i \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow (R_1 + a_1 R_2 + \cdots + a_m R_{m+1}) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (A|B)' \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$(\Leftarrow)$ $\quad (A|B)' \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow R_i \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall i > 1$

$$\& \; [R_1 + a_2 R_2 + \cdots + a_{m+1} R_{m+1}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow R_1\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\\ -1\end{bmatrix} + (a_2 R_1\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\\ -1\end{bmatrix}}_{=0} + \dots + a_m R_m\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\\ -1\end{bmatrix}}_{=0}) = 0$$

$$\Rightarrow R_1\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\\ -1\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ soluzione di } (A|B).$$

□

Sia $AX=B$ un sistema lineare.

Identifichiamo una base per lo spazio delle righe ossia lo sp. vettoriale generato dalle righe di $(A|B)$.

Il sistema che ha per equazioni quelle corrispondenti a tale base è equivalente al sistema di partenza → SISTEMA PRINCIPALE EQUIVALENTE.

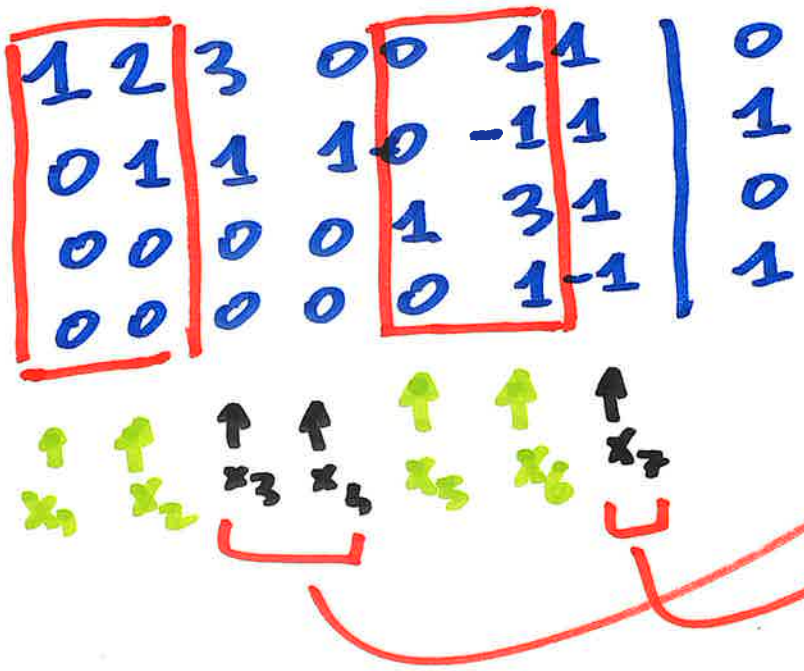
DIM: Troviamo la base dello sp. e poi sottraiamo a tutte le eq. rimanenti le comb. lineare delle eq. della base che le fornisce di modo da trasformarle in $0=0$ che è sempre soddisfatta. □

Esempio

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

A | B

7 eq. 7 inc.



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$\forall$ scelta di x_3, x_4, x_7 $\exists!$ soluzione in $x_1\, x_2\, x_5\, x_6$

2) calcolando $\hat{A}^{-1}$ ove $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \hat{A}^{-1}\hat{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \hat{A}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \hat{A}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Trattiamo il sistema dato come se fosse di Cramer nei parametri: (x_3, x_4, x_7) e nelle incognite $(x_1\ x_2\ x_5\ x_6)$.

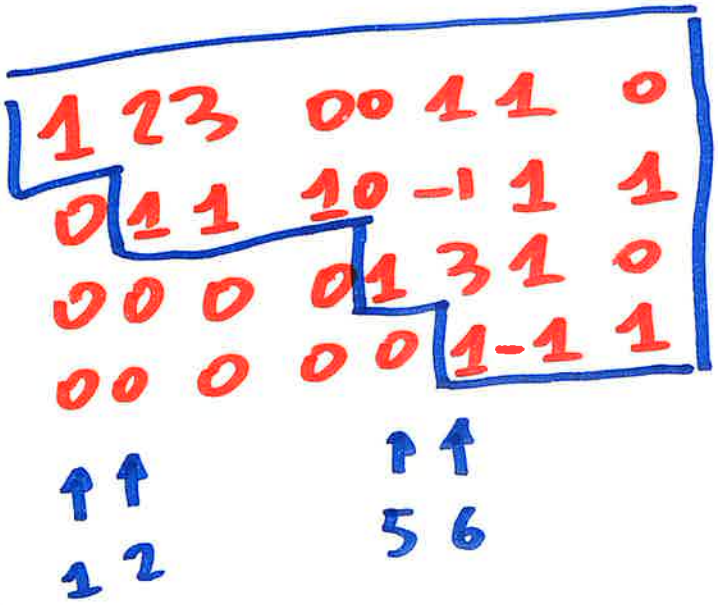
3) Riducendo $(A|B)$ oppure $(A|B)'$ in forma RREF.

Row-Reduced Echelon Form.

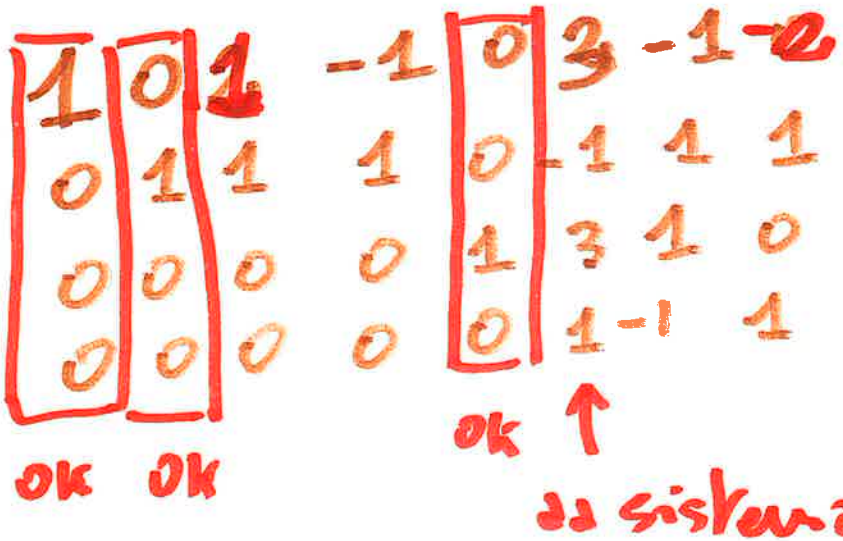
1) È una forma ridotta a scalini.
   ⇒ La prima entrata (pivot) della riga j non nulla è più a dx della prima entrata non nulla di ogni riga $< j$.

2) Le entrate sopra/sotto ogni pivot sono tutte zero ⇒ la colonna di un pivot contiene solo il pivot come entrata non nulla.

3) OGNI PIVOT È +1.


1 2 3 0 0 1 1 0
0 1 1 1 0 -1 1 1
0 0 0 0 1 3 1 0
0 0 0 0 0 1 -1 1
1 2
5 6

è a scalini


1 0 1 -1 0 3 -1 -2
0 1 1 1 0 1 1 1
0 0 0 0 1 3 1 0
0 0 0 0 0 1 -1 1
ok ok ok
da sistemare

3 metodi

1) per sostituzione.

$$x_6 = 1 + x_7$$

$$x_5 + 3x_6 = 0 - x_7 \Rightarrow x_5 = -x_7 - 3x_6 =$$

$$= -3 - 4x_7$$

$$x_2 - x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_7 \Rightarrow x_2 = 1 - x_3 - x_4 - x_7 + x_6 =$$

$$= 1 - x_3 - x_4 - x_7 + 1 + x_7 =$$

$$= 2 - x_3 - x_4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_6 = 0 - 3x_3 - x_7 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3 - x_6 - x_7$$

$$= 2x_3 + 2x_4 - 4 - 3x_3 - 1 - x_7 - x_7$$

$$= -x_3 + 2x_4 - 2x_7 - 5$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 0 & 2 \\ 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$I \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$$x_6 = 1 + x_7$$

$$x_5 = \cancel{-3 - x_3 - x_4} \; -3 - 4x_7$$

$$x_2 = 2 - x_3 - x_4$$

$$x_1 = -5 - x_3 + x_4 - 2x_7$$

$$\begin{cases} (1-k)x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 2k+1 \\ x + (k+1)z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-k & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2k+1 \\ 1 & 0 & k+1 & 1 \end{array}\right)$$

A B

$rk(A) \geq 2$

$$\det A = (1-k)\cdot 2\cdot(k+1) - 3(k+1) + 1 =$$

$$= (k+1)\cdot(2-2k-3)+1 =$$

$$= (k+1)(-1-2k)+1 =$$

$$-2k^2-2k-k-1+1 =$$

$$= k(-3-2k)$$

$k \neq 0$
$k \neq -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \exists!$ sol.

$\Rightarrow rk(A) = 3$
$rk(A|B) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+1-3-1 = 0$$

$\Rightarrow$ se $k=0 \Rightarrow$ ~~$rk(A) = rk(A|B) = 2 \Rightarrow$ sol~~

$$2 + 1 - 0 - 3 - 0 = 0$$

se $k = 0 \Rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 2 \Rightarrow \infty^2$ sol.

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 3 = 1 \neq 0$$

se $k = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow$ non $\exists$ soluzione!

risolvere per $k = 0$

~~1 1 0 0~~

3	2	1	1
1	0	1	1

$3x + 2y + z = 1$

$x + z = 1$

$x = 1 - z$

$3 - 3z + 2y + z = 1 \Rightarrow y = z - 1$

$S = \{(1,-1,0) + t\,((-1,1,1))\}.$